Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$

1 Prérequis

On rappelle les résultats suivants, qui seront utilisés sans démonstration dans le développement. Ils peuvent figurer en tant qu'item de plan.

Théorème 1.1 (Formule changement de variables)**.** *Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, Φ un C^1-difféomorphisme de U sur V. On note $J_\Phi(x)$ le déterminant de la matrice jacobienne de Φ en x. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors f est intégrable sur V si et seulement si $(f \circ \Phi) \cdot |J_\Phi| : U \to \mathbb{R}$ est intégrable sur U, et dans ce cas, on a l'égalité :*

$$\int_V f(y)\mathrm{d}y = \int_U f(\Phi(x))|J_\Phi(x)|\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

De plus, la formule précédente reste vraie dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ si on suppose f mesurable positive au lieu de f intégrable.

(On rappelle que cette formule est une conséquence du théorème d'inversion locale, donc a toute sa place dans la leçon 214).

Proposition 1.1. *En introduisant les fonctions bêta et gamma :*

$$B(x, y) := 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad \Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t\,.$$

On a $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$.

2 Le développement

On note λ_n la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, B_n la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.1. *On a $\lambda_n(B_n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.*

Démonstration. **Étape 1 :** *Changement de variables.*

Notons $s_i := \sin(\theta_i)$, $c_i := \cos(\theta_i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$ pour alléger les notations. On effectue le changement de variables en coordonnées polaires comme suit : posons

$$\begin{array}{cccc} &]0,1[\times]0,\pi[^{n-2}\times]0,2\pi[& \to & B_n \setminus [-1,1]^{n-2}\times[0,1]\times\{0\} \\ \Phi : & (r,\theta_1,\dots,\theta_{n-2},\theta_{n-1}) & \mapsto & (rc_1, rs_1c_2, rs_1s_2c_3, \dots, rs_1\dots s_{n-2}c_{n-1}, rs_1\dots s_{n-1})\,. \end{array}$$

Pour comprendre d'où vient cette application, il faut se souvenir du changement en coordonnées polaire ($n = 2$) et en coordonnées sphériques ($n = 3$) vu en physique. Il s'agit de la généralisation naturelle de la formule pour $n = 3$. Je conseille vivement de faire un dessin pour $n = 3$ devant le jury pour qu'il le voit, et pour qu'il voit aussi que l'ensemble de mesure nulle retiré est bien le bon (cf les dessins à la fin du développement).

On va montrer que cette application est bien bijective, entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ (l'espace d'arrivé est un ouvert privé d'un fermé).

Étape 2 : Φ *est bien définie.*

On remarque tout d'abord que Φ est bien définie car pour $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}) \in]0, 1[\times]0, \pi[^{n-2}\times]0, 2\pi[$, on montre par récurrence que :

$$\begin{aligned}(rs_1\dots s_{n-2}s_{n-1})^2 + (rs_1\dots s_{n-2}c_{n-1})^2 + \dots + (rc_1)^2 &= (rs_1\dots s_{n-3}s_{n-2})^2 + (rs_1\dots s_{n-3}c_{n-2})^2 + \dots + (rc_1)^2 \\ &= \dots = r^2(c_1^2 + s_1^2) = r^2 < 1\,.\end{aligned}$$

De plus, si $rs_1\dots s_{n-2}s_{n-1}=0$, alors $\theta_{n-1}=\pi$ (car $rs_1\dots s_{n-2}\neq 0$), donc $rs_1\dots s_{n-2}c_{n-1}=-rs_1\dots s_{n-2}<0$. Ainsi, $\Phi(]0,1[\times]0,\pi[^{n-2}\times]0,2\pi[)\subset B_n\setminus[-1,1]^{n-2}\times[0,1]\times\{0\}$.

Étape 3 : Φ *est bijective.*

En effet, on va expliciter l'application réciproque. Pour $(a_1,\dots,a_n)\in B_n\setminus[-1,1]^{n-2}\times[0,1]\times\{0\}$, $(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-2},\theta_{n-1})\in]0,1[\times]0,\pi[^{n-2}\times]0,2\pi[$ on a :

$$\begin{cases} rc_1=a_1\\ rs_1c_2=a_2\\ \quad\vdots\\ rs_1\dots s_{n-3}c_{n-2}=a_{n-2}\\ rs_1\dots s_{n-2}c_{n-1}=a_{n-1}\\ rs_1\dots s_{n-2}s_{n-1}=a_n\end{cases}\iff\begin{cases} r^2=a_n^2+a_{n-1}^2+\dots+a_1^2\\ c_1=\dfrac{a_1}{\left(a_n^2+a_{n-1}^2+\dots+a_1^2\right)^{\frac12}}\\ c_2=\dfrac{a_2}{s_1\left(a_n^2+a_{n-1}^2+\dots+a_1^2\right)^{\frac12}}\\ \quad\vdots\\ c_{n-2}=\dfrac{a_{n-2}}{s_1\dots s_{n-3}\left(a_n^2+a_{n-1}^2+\dots+a_1^2\right)^{\frac12}}\\ c_{n-1}=\dfrac{a_{n-1}}{s_1\dots s_{n-2}\left(a_n^2+a_{n-1}^2+\dots+a_1^2\right)^{\frac12}}\\ s_{n-1}=\dfrac{a_n}{s_1\dots s_{n-2}\left(a_n^2+a_{n-1}^2+\dots+a_1^2\right)^{\frac12}}\end{cases}$$

On remarque qu'il s'agit bien d'une équivalence en raison de là où vivent les objets : on utilise $r>0$ *pour pouvoir diviser par* r *et pour avoir* $r^2=a_n^2+a_{n-1}^2+\dots+a_1^2\iff r=\sqrt{a_n^2+a_{n-1}^2+\dots+a_1^2}$, $\theta_1\in]0,\pi[$ *pour avoir* $c_1=\frac{a_1}{\left(a_n^2+a_{n-1}^2+\dots+a_1^2\right)^{\frac12}}\iff\theta_1=arcos\left(\frac{a_1}{\left(a_n^2+a_{n-1}^2+\dots+a_1^2\right)^{\frac12}}\right)$ *(on peut bien appliquer arcos car* $\frac{a_1}{\left(a_n^2+a_{n-1}^2+\dots+a_1^2\right)^{\frac12}}\in[-1,1]$*). Même raisonnement pour* $\theta_2,\dots,\theta_{n-2}$*. Le paramètre* θ_{n-1} *est déterminé par les 2 dernières équations (on a besoin de 2 équations pour lui et non d'une contrairement aux autres paramètres car* $\theta_{n-2}\in]0,2\pi[$*).* Ainsi défini, on a bien $\Phi^{-1}(B_n\setminus[-1,1]^{n-2}\times[0,1]\times\{0\})\subset]0,1[\times]0,\pi[^{n-2}\times]0,2\pi[$.

En effet, comme $(a_1,\dots,a_n)\in B_n\setminus[-1,1]^{n-2}\times[0,1]\times\{0\}$*, on a nécessairement* $(a_1,\dots,a_n)\in[-1,1]^n$*. De plus,* $r=\left(a_n^2+a_{n-1}^2+\dots+a_1^2\right)^{\frac12}<1$*, et* $r\geq a_{n-1}^2+a_n^2>0$ *car on ne peut pas avoir* $a_{n-1}=a_n=0$*. Ainsi,* $r\in]0,1[$*.*
On a $c_1,\dots,c_{n-2}\in]-1,1[$ *car pour* $1\leq i\leq n-2$*,* $a_1^2+\dots+a_n^2\geq a_i^2+a_{n-1}^2+a_n^2>a_i^2$ *(toujours car on ne peut pas avoir* $a_{n-1}=a_n=0$*). Donc* $\theta_i=arcos(c_i)\in]0,\pi[$*. Par l'absurde, si* $\theta_{n-1}=0 \mod 2\pi$*, alors* $(c_{n-1},s_{n-1})=(1,0)$*, ce qui n'est pas non plus possible, donc* $\theta_{n-1}\in]0,2\pi[$*.*

Ainsi, Φ est bien une bijection.

Étape 4 : *Calcul de* $J_\Phi^n(x)$ *pour* $x=(\theta_1,\dots,\theta_{n-1})\in U$*.*

De plus, en notant J_Φ^n la jacobienne en dimension n, on a :

$$J_\Phi^n=\begin{vmatrix} c_1 & -rs_1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ s_1c_2 & rc_1c_2 & -rs_1s_2 & 0 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0\\ s_1\dots s_{n-2}\color{red}{c_{n-1}} & \dots & \dots & \dots & rs_1\dots s_{n-3}c_{n-2}\color{red}{c_{n-1}} & -rs_1\dots s_{n-2}s_{n-1}\\ s_1\dots s_{n-2}\color{blue}{s_{n-1}} & \dots & \dots & & rs_1\dots s_{n-3}c_{n-2}\color{blue}{s_{n-1}} & rs_1\dots s_{n-2}c_{n-1}\end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière colonne et en factorisant c_{n-1} (respectivement s_{n-1}) sur la dernière ligne du déterminant obtenu, il vient :

$$J_\Phi^n=rs_1\dots s_{n-2}c_{n-1}\cdot\color{red}{c_{n-1}}J_\Phi^{n-1}-(-rs_1\dots s_{n-2}s_{n-1}\cdot\color{blue}{s_{n-1}})J_\Phi^{n-1}=rs_1\dots s_{n-2}J_\Phi^{n-1}.$$

Comme $J_\Phi^2=r$, on obtient par itération de la formule ci-dessus $J_\Phi^n=r^{n-1}s_1^{n-2}\dots s_{n-3}^2s_{n-2}\neq 0$ car $r\neq 0$ et $\theta_1,\dots\theta_{n-2}\in]0,\pi[$. Ainsi, Φ est bien un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme d'après le théorème d'inversion globale. *(Si il vous saute aux yeux que l'application réciproque vue précédemment (dans laquelle il y a des racines carrés, des arcos, et où il paraît compliqué d'exprimer simplement* θ_{n-1} *en fonction des fonctions usuelles) est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur l'ensemble où on l'a défini (ce qui n'est pas mon cas à cause de "l'expression" de* θ_{n-1}*), vous* *pouvez vous passer du théorème d'inversion globale ici et affirmer que Φ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme car Φ et Φ^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$.)*

Étape 5 : *Calcul de $\lambda_n(B_n)$.*

On a $\lambda_n([-1,1]^{n-2} \times [0,1] \times \{0\}) = 0$ (car il s'agit d'un ensemble inclus dans un espace de dimension $n-1$). D'après la formule du changement de variables puis le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\lambda_n(B_n) &= \int_{B_n} 1\mathrm{d}x = \int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r \int_{]0,\pi[^{n-2}} s_1^{n-2} \dots s_{n-2}\mathrm{d}\theta_1 \dots \mathrm{d}\theta_{n-2} \int_{]0,2\pi[} 1\mathrm{d}\theta_{n-1} \\ &= \frac{1}{n}\prod_{l=1}^{n-2}\left(\int_0^\pi \sin^l(\theta)\mathrm{d}\theta\right) \times 2\pi\end{aligned}$$

Or pour $0 \leq l \leq n-2$, on a : $\int_0^\pi \sin^l(\theta)\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^l(\theta)\mathrm{d}\theta = 2W_l$ où W_l désigne la l-ième intégrale de Wallis. On a $W_l = B(\frac{l+1}{2}, \frac{1}{2})$. En utilisant la relation $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$, on obtient par télescopage :

$$\prod_{l=1}^{n-2}\int_0^\pi \sin^l(\theta)\mathrm{d}\theta = (\sqrt{\pi})^{n-2}\prod_{l=1}^{n-2}\frac{\Gamma(\frac{l+1}{2})}{\Gamma(\frac{l+1}{2}+\frac{1}{2})} = \pi^{\frac{n-2}{2}}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} .$$

d'où : $\lambda_n(B_n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$. *(On peut arrêter le développement ici si on veut).*

Or

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{B\left(\frac{n}{2},1\right)\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(1)} \quad \text{et} \quad B\left(\frac{n}{2},1\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{n}\left[\sin^n(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n} .$$

Par conséquent : $\lambda_n(B_n) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$. □

Remarque 2.1. Ainsi rédigé, le développement paraît long (voire très long) car je l'ai rédigé avec (presque) tous les détails. Il ne faut pas hésiter à aller vite sur certaines choses. En particulier, on peut se contenter de mentionner à l'oral car Φ est bien définie et que son inverse aussi. Par contre, il faut savoir le justifier proprement (comme fait ici) si le jury pose des questions là-dessus.

Remarque 2.2. Il existe une autre manière de calculer le volume de la boule unité : au lieu de faire un changement de variable en dimension n, on se contente d'un changement en coordonnées polaires ($n = 2$), puis on raisonne par récurrence sur la dimension n de l'espace. C'est cette deuxième méthode qu'on trouve le plus souvent (par exemple dans Caldero : Voyage en Analystan si ma mémoire est bonne, et ici). Je préfère ma méthode (même si il n'y a pas de référence) car elle se recase bien mieux selon moi, et car elle est plus originale et donc risque de plus plaire au jury.

Recasages :

1. 215 (applications différentiables) : Le dév rentre parfaitement : toute la preuve repose sur la formule de changement de variables dans $\mathbb{R}^d$.

2. 214 (Théorème d'inversion locale) : La formule de changement de variable est une application du théorème d'inversion locale. De plus, si on rédige le dév comme ci-dessus, on applique le théorème d'inversion global à Φ pour justifier que c'est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

3. 236 (Exemples de calcul d'intégrales) : Le volume de la boule unité est une intégrale, qu'on calcule à l'aide d'un changement de variable et en se ramenant à des intégrales connues (Wallis, Beta, Gamma), donc c'est un développement très riche pour cette leçon.

4. 206 (Utilisation de la dimension finie) : L'intégrale de Lebesgue est spécifique à la dimension finie, et c'est elle qu'on utilise dans l'énoncé et la preuve de la formule de changement de variables dans $\mathbb{R}^d$. Le dév est donc presque intégralement (sans jeu de mot) une utilisation de l'intégrale de Lebesgue, qui est spécifique à la dimension finie. On voit apparaître une matrice jacobienne. Je trouve que ce dév rentre parfaitement dans cette leçon.

5. 234 (Espaces L^p) : Je ne pense pas que ce dév soit l'idéal pour cette leçon, mais pour moi ça passe. En effet, la formule de changement de variable trouve sa place dans cette leçon (on a une fonction intégrable dans l'énoncé de théorème). De plus, on utilise le théorème de Fubini-Tonelli dans la dernière étape, et pour prouver la formule admise $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

6. 149 (déterminants) : Le recasage est dangereux dans cette leçon (car on ne fait que de l'analyse dans le développement, il n'y a pas du tout d'algèbre, donc le jury d'algèbre risque de ne pas trop aimer), mais c'est toujours mieux que rien. Le calcul du volume de la boule se ramène au calcul d'un déterminant jacobien, qui est non trivial et se fait par développement par rapport à une colonne. On a donc une application du déterminant au calcul différentiel. Ce type d'utilisation du déterminant est mentionné dans le rapport du jury. De plus, c'est toujours bien de mettre des applications en analyse dans les leçons d'algèbre. (On peut faire une partie en parlant de déterminant en calcul différentiel, qu'on illustre avec ce développement. On peut aussi mentionner le déterminant en équations différentielles avec le wronskien, illustré par le théorème de Sturm (c'est un autre dév) par exemple).

7. 235 (Interversion de symboles en analyse) : Pour moi, c'est trop léger pour faire un dév dans cette leçon, mais ça peut être mentionné dans le plan puisqu'on utilise Fubini-Tonelli dans la dernière étape.

8. 239 (Intégrale dépendant d'un paramètre) : Pour moi, on peut mentionner le résultat dans le plan de cette leçon en tant qu'application de la relation $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, mais pas en tant que dév. (En effet, on ne prouve même pas ce point dans le dév, or c'est le seul faisant intervenir dans intégrales dépendant d'un paramètre).